CZĘSTOCHOWA UNIVERSITY OF TECHNOLOGY
FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING AND COMPUTER SCIENCE
INSTITUTE OF MECHANICS AND MACHINE DESIGN FUNDAMENTALS

IMiPKM

IX Conference
Mathematical Modelling in Physics and Engineering

THE EFFECT OF TORSIONAL RIGIDITY BETWEEN ELEMENTS ON FREE VIBRATIONS OF A TELESCOPIC HYDRAULIC CYLINDER SUBJECTED TO EULER'S LOAD

Łukasz Kutrowski
Sebastian Uzny

Poraj 18-21.09.2017

Ministerstwo Nauki
i Szkolnictwa Wyższego

Organizacja IX Konferencji Modelowanie Matematyczne
w Fizyce i Technice (MMFT 2017)
- zadanie finansowane w ramach umowy 829/P-DUN/2017
ze środków Ministra Nauki i Szkolnictwa Wyższego przeznaczonych
na działalność upowszechniającą naukę.

PRESENTATION PLAN

1. Hydraulic telescopic cylinder - design assumptions
2. Mathematical model of hydraulic telescopic cylinder
3. Results of numerical simulations
4. Conclusions

Ministerstwo Nauki
i Szkolnictwa Wyższego

Organizacja IX Konferencji Modelowanie Matematyczne
w Fizyce i Technice (MMFT 2017)
- zadanie finansowane w ramach umowy 829/P-DUN/2017
ze środków Ministra Nauki i Szkolnictwa Wyższego przeznaczonych
na działalność upowszechniającą naukę.

HYDRAULIC TELESCOPIC CYLINDER - DESIGN ASSUMPTIONS

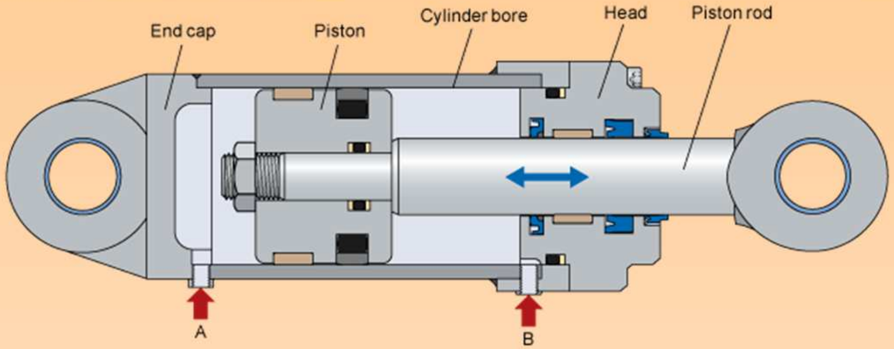

Fig.1 Hydraulic cylinder

source: http://www.skf.com

Hydraulic cylinder converts the energy of compressed hydraulic fluid to mechanical energy.

Telescopic hydraulic cylinder consists of more than 1 cylinder.

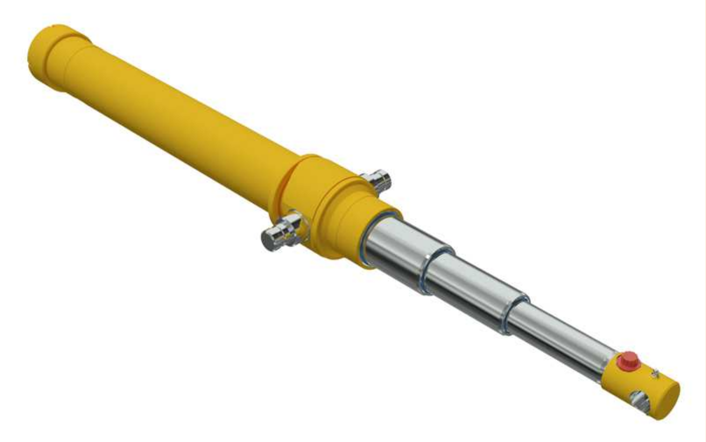

Fig.2 Hydraulic telescopic cylinder

source: http://www.eagle-hydraulic.com/htc.html

Main design assumptions:

- strength of cylinders and piston rod
- **buckling criterion**
- strength of sliding rings and seals

Ministerstwo Nauki
i Szkolnictwa Wyższego

Organizacja IX Konferencji Modelowanie Matematyczne w Fizyce i Technice (MMFT 2017)
- zadanie finansowane w ramach umowy 829/P-DUN/2017 ze środków Ministra Nauki i Szkolnictwa Wyższego przeznaczonych na działalność upowszechniającą naukę.

MATHEMATICAL MODEL OF HYDRAULIC TELESCOPIC CYLINDER

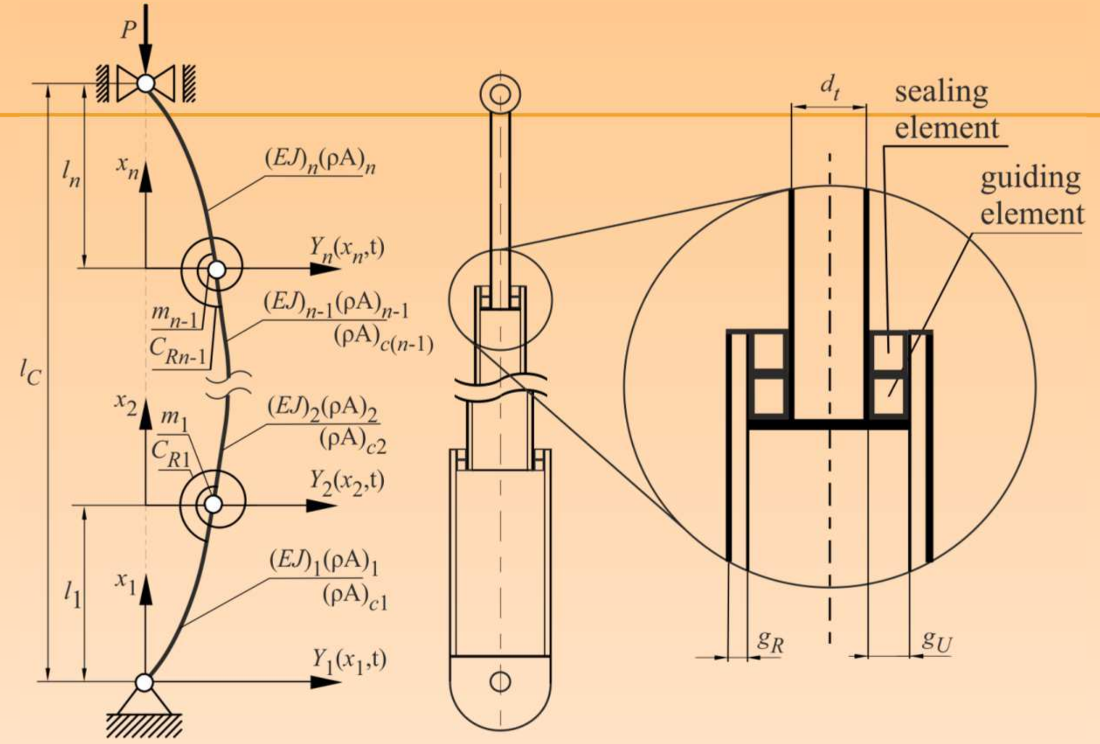

Fig.3 Scheme of hydraulic telescopic cylinder

$$V=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\int_{0}^{l_i}(EJ)_i\left(\frac{\partial^2 Y_i(x_i,t)}{\partial x_i^{\,2}}\right)^2 dx_i-\frac{1}{2}P\sum_{i=1}^{n}\int_{0}^{l_i}\left(\frac{\partial Y_i(x_i,t)}{\partial x_i}\right)^2 dx_i+\frac{1}{2}C_{Ri}\sum_{i=1}^{n}\int_{0}^{l_i}\left[\left.\frac{\partial Y_i(x_i,t)}{\partial x_i}\right|^{x_i=l_i}-\left.\frac{\partial Y_{i+1}(x_{i+1},t)}{\partial x_{i+1}}\right|_{x_{i+1}=0}\right]^2 dx_i \qquad (1)$$

$$T=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(\rho A)_i\int_{0}^{l_i}\left(\frac{\partial Y_i(x_i,t)}{\partial t}\right)^2 dx_i+m_i\left(\left.\frac{\partial Y_i(x_i,t)}{\partial t}\right|^{x=l_i}\right)^2+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1}(\rho A)_{ci}\int_{0}^{l_i}\left(\frac{\partial Y_i(x_i,t)}{\partial t}\right)^2 dx_i \qquad (2)$$

Ministerstwo Nauki
i Szkolnictwa Wyższego

**Organizacja IX Konferencji Modelowanie Matematyczne
w Fizyce i Technice (MMFT 2017)**
- zadanie finansowane w ramach umowy 829/P-DUN/2017
ze środków Ministra Nauki i Szkolnictwa Wyższego przeznaczonych
na działalność upowszechniającą naukę.

MATHEMATICAL MODEL OF HYDRAULIC TELESCOPIC CYLINDER

Equations of motion (after separation of variables):

$$\left.\begin{aligned}
&(EI)_i \frac{d^4 y_i(x_i)}{dx_i^{\,4}} + P\frac{d^2 y_i(x_i)}{dx_i^{\,2}} - (\rho A)_i\,\omega^2 y_i(x_i) - (\rho A)_{ci}\,\omega^2 y_i(x_i) = 0 \quad dla\ i = 1 \ldots n-1 \\
&(EI)_i \frac{d^4 y_i(x_i)}{dx_i^{\,4}} + P\frac{d^2 y_i(x_i)}{dx_i^{\,2}} - (\rho A)_i\,\omega^2 y_i(x_i) = 0 \quad dla\ i = n
\end{aligned}\right. \tag{4}$$

Natural boundary conditions:

$$(EI)_i \left.\frac{d^3 y_i(x_i)}{dx_i^{\,3}}\right|^{x_i=l_i} - (EI)_{i+1}\left.\frac{d^3 y_{i+1}(x_{i+1})}{dx_{i+1}^{\,3}}\right|_{x_{i+1}=0} + P\left.\frac{dy_i(x_i)}{dx_i}\right|^{x_i=l_i} - P\left.\frac{dy_{i+1}(x_{i+1})}{dx_{i+1}}\right|_{x_{i+1}=0} + m_i\omega^2\, y_i(x_i)\Big|^{x_i=l_i} = 0 \tag{5}$$

$$-(EI)_i \left.\frac{d^2 y_i(x_i)}{dx_i^{\,2}}\right|^{x_i=l_i} - C_{Ri}\left[\left.\frac{dy_i(x_i)}{dx_i}\right|^{x_i=l_i} - \left.\frac{dy_{i+1}(x_{i+1})}{dx_{i+1}}\right|_{x_{i+1}=0}\right] = 0 \tag{6}$$

$$(EI)_{i+1} \left.\frac{d^2 y_{i+1}(x_{i+1})}{dx_{i+1}^{\,2}}\right|_{x_{i+1}=0} + C_{Ri}\left[\left.\frac{dy_i(x_i)}{dx_i}\right|^{x_i=l_i} - \left.\frac{dy_{i+1}(x_{i+1})}{dx_{i+1}}\right|_{x_{i+1}=0}\right] = 0 \tag{7}$$

$$(EI)_1 \left.\frac{d^2 y_1(x_1)}{dx_1^{\,2}}\right|_{x=0} = 0 \tag{8}$$

$$-(EI)_n \left.\frac{d^2 y_n(x_n)}{dx_n^{\,2}}\right|^{x_n=l_n} = 0 \tag{9}$$

Ministerstwo Nauki
i Szkolnictwa Wyższego

Organizacja IX Konferencji Modelowanie Matematyczne w Fizyce i Technice (MMFT 2017)
- zadanie finansowane w ramach umowy 829/P-DUN/2017
ze środków Ministra Nauki i Szkolnictwa Wyższego przeznaczonych
na działalność upowszechniającą naukę.

MATHEMATICAL MODEL OF HYDRAULIC TELESCOPIC CYLINDER

Geometric boundary conditions (in case of simply supported fixing):

$$y_i(l_i) = y_{i+1}(0) \tag{10}$$

$$y_1(0) = 0 \tag{11}$$

$$y_n(l_n) = 0 \tag{12}$$

Solution of equation (4) can be written as follow:

$$y_i(x_i) = A_i \cosh(\alpha_i x_i) + B_i \sinh(\alpha_i x_i) + C_i \cos(\beta_i x_i) + D_i \sin(\beta_i x_i) \tag{13}$$

where: $\alpha_i = \sqrt{-\frac{k_i^2}{2} + \sqrt{\frac{k_i^4}{4} + \Omega_i^2}}$; $\beta_i = \sqrt{\frac{k_i^2}{2} + \sqrt{\frac{k_i^4}{4} + \Omega_i^2}}$ (14,15)

After substitution of the solution (13) into boundary conditions, the system of equations is obtained. The matrix determinant of coefficients equated to zero leads to the transcendental equation, from which the natural vibration frequency of the system can be determined.

Ministerstwo Nauki
i Szkolnictwa Wyższego

Organizacja IX Konferencji Modelowanie Matematyczne w Fizyce i Technice (MMFT 2017)
- zadanie finansowane w ramach umowy 829/P-DUN/2017
ze środków Ministra Nauki i Szkolnictwa Wyższego przeznaczonych
na działalność upowszechniającą naukę.

RESULTS OF NUMERICAL SIMULATIONS

Non-dimensional parameters of the hydraulic telescopic cylinder used due to results presentation:

$$\zeta_{GU} = \frac{g_U}{d_t};\ \zeta_{GR} = \frac{g_R}{d_t};\ c = \frac{C_R l_C}{(EI)_n};\ \lambda = \frac{P l_C^{\,2}}{(EI)_n};\ \lambda_{kr} = \frac{P_{kr} l_C^{\,2}}{(EI)_n}\ \Omega^* = \frac{\omega^2 (\rho A)_n l_C^{\,4}}{(EI)_n}$$

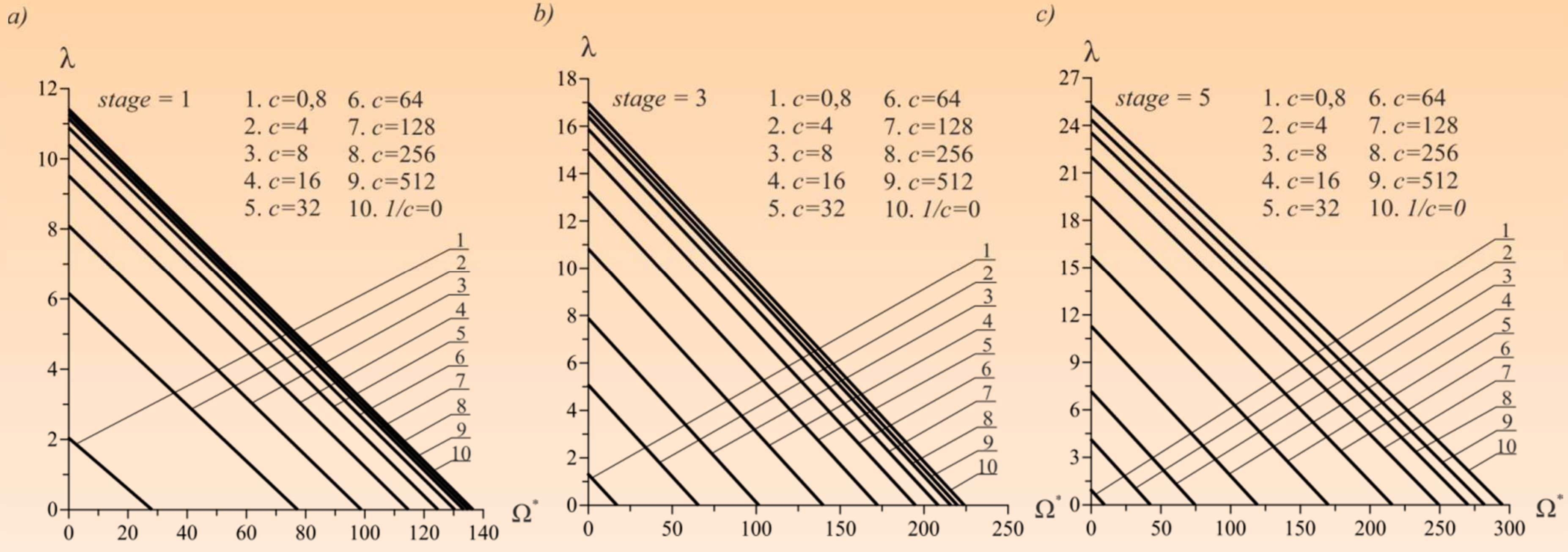

Fig.3a-c Characteristic curves on non-dimensional plane for different parameters of stiffness between elements ($d_t = 0.1$[m], $\zeta_{GU} = 0{,}05$, $\zeta_{GR} = 0{,}1$)

Ministerstwo Nauki
i Szkolnictwa Wyższego

Organizacja IX Konferencji Modelowanie Matematyczne w Fizyce i Technice (MMFT 2017)
- zadanie finansowane w ramach umowy 829/P-DUN/2017 ze środków Ministra Nauki i Szkolnictwa Wyższego przeznaczonych na działalność upowszechniającą naukę.

RESULTS OF NUMERICAL SIMULATIONS

Non-dimensional parameters of the hydraulic telescopic cylinder used due to results presentation:

$$\zeta_{GU}=\frac{g_U}{d_t};\ \zeta_{GR}=\frac{g_R}{d_t};\ c=\frac{C_R l_C}{(EI)_n};\ \lambda=\frac{P l_C^{\,2}}{(EI)_n};\ \lambda_{kr}=\frac{P_{kr} l_C^{\,2}}{(EI)_n}\ \ \Omega^*=\frac{\omega^2(\rho A)_n\, l_C^{\,4}}{(EI)_n}$$

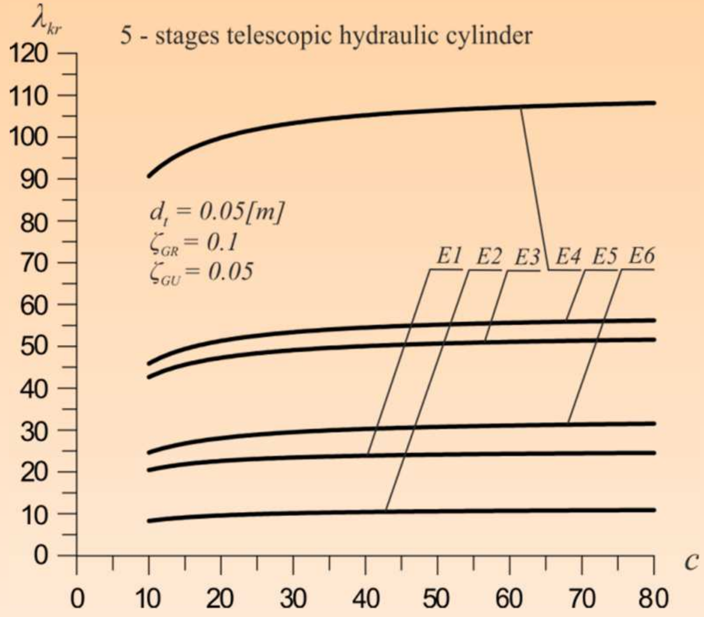

Fig.4 The effect of stiffness between elements on parameter of critical force for different types of fixing

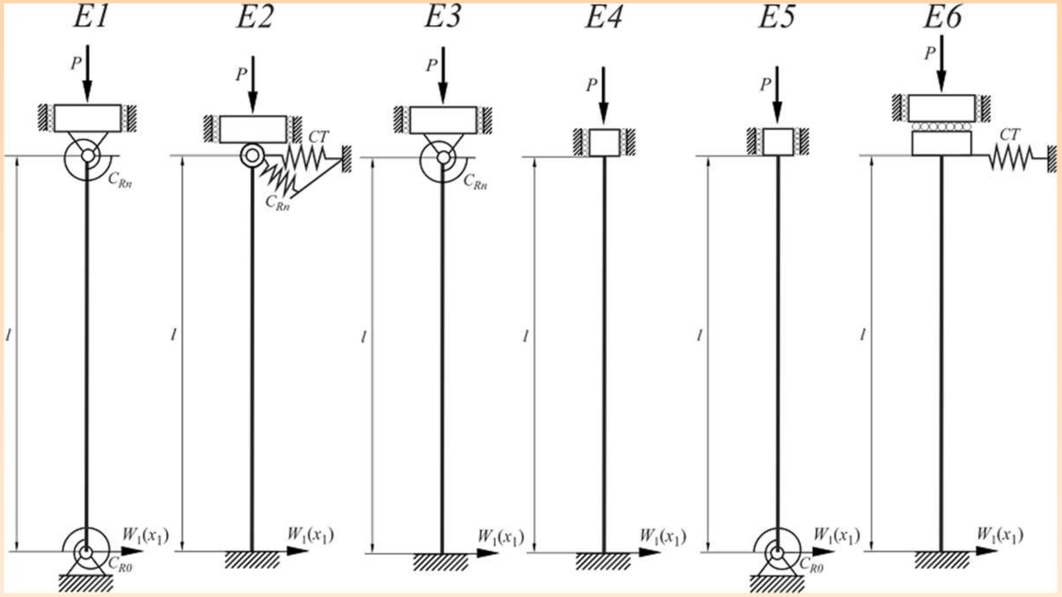

Fig.5 Types of fixing (on the basis of column)

Ministerstwo Nauki
i Szkolnictwa Wyższego

Organizacja IX Konferencji Modelowanie Matematyczne
w Fizyce i Technice (MMFT 2017)
- zadanie finansowane w ramach umowy 829/P-DUN/2017
ze środków Ministra Nauki i Szkolnictwa Wyższego przeznaczonych
na działalność upowszechniającą naukę.

RESULTS OF NUMERICAL SIMULATIONS

Non-dimensional parameters of the hydraulic telescopic cylinder used due to results presentation:

$$\zeta_{GU} = \frac{g_U}{d_t};\ \zeta_{GR} = \frac{g_R}{d_t};\ c = \frac{C_R l_C}{(EI)_n};\ \lambda = \frac{P l_C^2}{(EI)_n};\ \lambda_{kr} = \frac{P_{kr} l_C^2}{(EI)_n}\ \ \Omega^* = \frac{\omega^2 (\rho A)_n l_C^4}{(EI)_n}$$

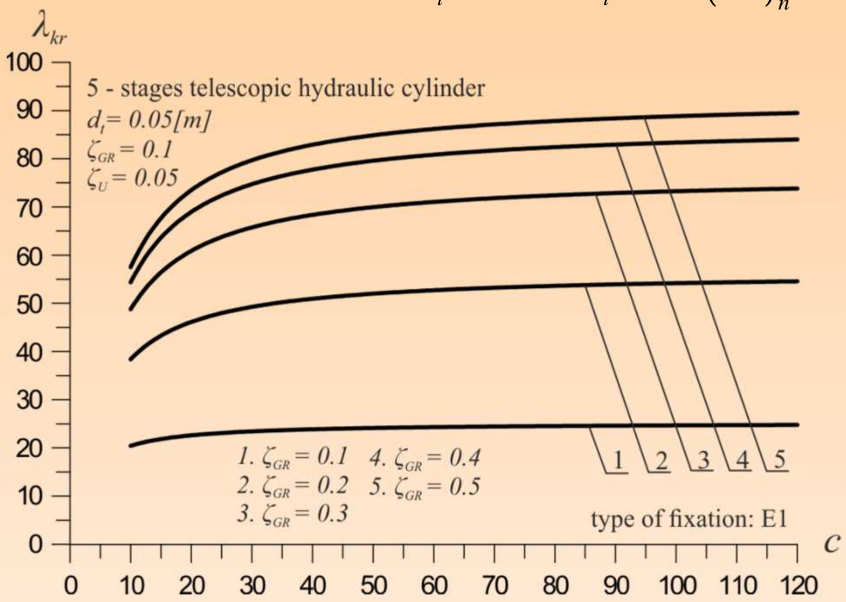

Fig.6 The effect of stiffness between elements on parameter of critical force for different parameters of cylinder barrel thickness

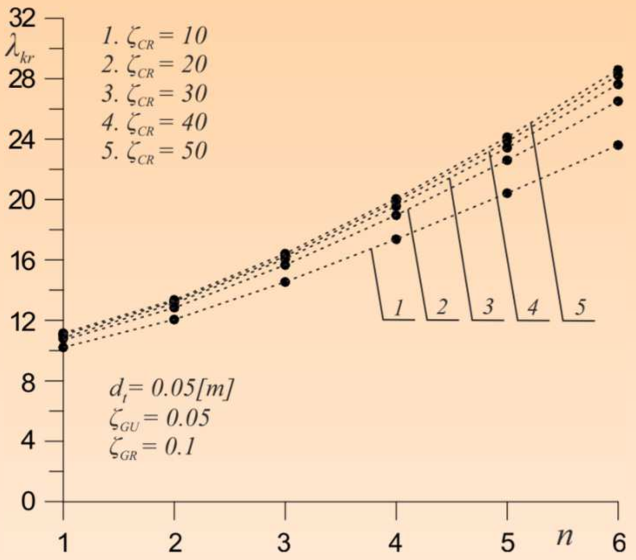

Fig.7 The effect of number of stages on parameter of critical force for different parameters of stiffness between following elements

Ministerstwo Nauki
i Szkolnictwa Wyższego

Organizacja IX Konferencji Modelowanie Matematyczne
w Fizyce i Technice (MMFT 2017)
- zadanie finansowane w ramach umowy 829/P-DUN/2017
ze środków Ministra Nauki i Szkolnictwa Wyższego przeznaczonych
na działalność upowszechniającą naukę.

CONCLUSIONS

1. On the basis of boundary value problem, using kinetic stability criterion, numerical calculations concerning free vibrations of telescopic hydraulic cylinder were performed.
2. The effect of torsional rigidity between elements (in form of non-dimensional parameter c) on free vibrations of a telescopic hydraulic cylinder subjected to Euler's load (in case of simply supported fixation) was obtained. The relation was presented for 1, 3, 5 stage cylinders on characteristic curves.
3. The smaller the rotational node stiffness, the greater its influence on vibration frequency and critical load.
4. The higher number of stages, the greater influence of rotational node stiffness on vibration frequency and critical load.
5. The influence of torsional rigidity between elements on parameter of critical force is greater for types of fixing, which are „more rigid".
6. The greater cylinder barrel thickness, the greater influence of rotational node stiffness on critical load - especially for small values of ζ_{CR}.

Ministerstwo Nauki
i Szkolnictwa Wyższego

Organizacja IX Konferencji Modelowanie Matematyczne w Fizyce i Technice (MMFT 2017)
- zadanie finansowane w ramach umowy 829/P-DUN/2017
ze środków Ministra Nauki i Szkolnictwa Wyższego przeznaczonych
na działalność upowszechniającą naukę.

IMiPKM

IX Conference
Mathematical Modelling in Physics and Engineering

THANK YOU FOR YOUR ATTENTION

Ministerstwo Nauki
i Szkolnictwa Wyższego

Organizacja IX Konferencji Modelowanie Matematyczne w Fizyce i Technice (MMFT 2017)
- zadanie finansowane w ramach umowy 829/P-DUN/2017 ze środków Ministra Nauki i Szkolnictwa Wyższego przeznaczonych na działalność upowszechniającą naukę.

POLITECHNIKA CZĘSTOCHOWSKA